Конспект занятия по математике

Адукар

Преподаватель

Егор Адамчик

2017 год

Результаты ЦТ по математике 2016

Если оценивать результаты ЦТ 2016 года по математике в целом, то они будут выше 2015. 63,6% абитуриентов преодолели пороговое значение в 15 баллов, установленное для математики как для первого профильного предмета. 81,74% преодолели пороговое значение в 10 баллов, установленное для математики как для второго профильного предмета. Перешагнуть через полсотни баллов смогли 14,44% поступающих.

В ЦТ по математике 2016 года были включены задания, посильные для абитуриентов с разным уровнем подготовки. Включение в тест задач B11, B12 пятого (наивысшего) уровня сложности позволило ранжировать абитуриентов с наиболее высоким уровнем подготовки.

Количество сдававших: 45623

Написали на 100 баллов: 25

Количество заданий в одном варианте теста − 30.
Часть А – 18 заданий.
Часть В – 12 заданий.

Структура теста
Числа и вычисления – 4 задания (13,3 %).
Выражения и их преобразования – 3 задания (10 %).
Уравнения и неравенства – 11 заданий (36,7 %).
Функции – 4 задания (13,3 %).
Геометрия – 8 заданий (26,7 %).

Время выполнения теста – 180 минут.
На централизованном тестировании по математике не разрешается пользоваться калькулятором.

Простейшие текстовые задачи

Отношением двух чисел называется частное от деления одного числа на другое $\frac{a}{b}=n$
Отношение показывает, во сколько раз *a* больше *b*, или какую часть числа *b* составляет число *a*.

Пропорцией называется равенство двух отношений, т.е. $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$. Числа *a* и *y* называются крайними членами, а числа *x* и *b* – средними членами пропорции.

В пропорции $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$ произведение крайних членов равно произведению средних $ay=bx$.
Прямая пропорциональность - это функция, заданная формулой *y=kx* или , где *k≠ 0*, где *k* - коэффициент пропорциональности, *y* и *x* - пропорциональные переменные.
Прямо пропорциональные величины. Две величины называются **прямо пропорциональными**, если с увеличением значения одной из них в несколько раз значение другой увеличивается во столько же раз.
Обратная пропорциональность. **Обратная пропорциональность** - это функция, заданная формулой $x\cdot y=k$ или $y=\frac{k}{x}$, где $k\neq 0$, $x\neq 0$, где *k* - коэффициент пропорциональности, *y* и *x* - обратно пропорциональные переменные.
Обратно пропорциональные величины. Две величины называются **обратно пропорциональными**, если с увеличением значения одной из них в несколько раз значение другой уменьшается во столько же раз.
Существуют типовые задачи на проценты.
Задача 1. Нахождение процентов данного числа.
Чтобы найти *a%* от числа *b*, нужно проценты выразить в виде дроби: a/100 и число *b* умножить на эту дробь.
Например, 30% от 60 руб. составляют 0,3*60 = 18 (руб.).
Задача 2. Нахождение числа по его процентам.
Если известно, что *a%* числа *x* равно *b*, то число *x* находим по формуле *x=(b/a)*100*. Т.е. нужно проценты выразить в виде дроби и известное число *b* разделить на эту дробь.
Например, если 3% денежного вклада составляют 150 руб., то весь вклад равен 150/0,03 = 5000 (руб.).
Задача 3. Нахождение процентного отношения чисел.
Чтобы найти процентное отношение двух чисел *a* и *b*, надо отношение этих чисел умножить на 100, т.е. вычислить *(a/b)*100%*.
Например, если при плановом задании 60 автомобилей в день завод выпустил 90 автомобилей, то он выполнил задание на (90/60)*100% = 150%.
Задача 4. Увеличение на *p%*.
Если число *a* увеличено на *p%*, то оно увеличено в *(1+p100)* раз, то получится число *a*(1+p100)* .
Задача 5. Уменьшение на *q%*.
Если уменьшено на *q%*, 0≤ q≤ 100, то оно уменьшено в *(1-p100)* раз, то получаются число *a*(1-p100)*.
Задача 6. Начисление простых процентов.
При многократном начислении **простых процентов** начисление делается по отношению к исходной сумме и представляет собой каждый раз одну и ту же величину: $S=a\left(1+\frac{p\cdot n}{100}\right)$,

где *a* - исходная сумма, *S* - наращенная сумма, *p%* - процентная ставка, *n* - число периодов начисления.

Задача 7. Начисление сложных процентов.

При многократном начислении **сложных процентов** начисление каждый раз делается по отношению к сумме с уже начисленными ранее процентами: $S = a\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$, где *a* - исходная сумма, *S* - наращенная сумма, *p%* - процентная ставка, *n* - число периодов начисления.

Задачи

№1

Аня купила проездной билет на месяц и сделала за месяц 41 поездку. Сколько рублей она сэкономила, если проездной билет стоит 580 рублей, а разовая поездка — 20 рублей?

№2

Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 3300 рублей. До установки счётчиков за воду платили 800 рублей ежемесячно. После установки счётчиков ежемесячная оплата воды стала составлять 300 рублей. Через какое наименьшее количество месяцев экономия по оплате воды превысит затраты на установку счётчиков, если тарифы на воду не изменятся?

№3

Шоколадка стоит 35 рублей. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за две шоколадки, покупатель получает три (одну в подарок). Какое наибольшее количество шоколадок можно получить, потратив не более 200 рублей в воскресенье?

№4

Для покраски 1 м^2 потолка требуется 240 г краски. Краска продается в банках по 2,5 кг. Сколько банок краски нужно купить для покраски потолка площадью 50 м^2?

№5

Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы Мария Константиновна получила 9570 рублей. Сколько рублей составляет заработная плата Марии Константиновны?

№6

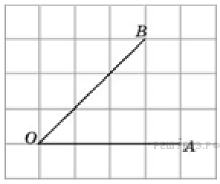
Футболка стоила 800 рублей. Затем цена была снижена на 15%. Сколько рублей сдачи с 1000 рублей должен получить покупатель при покупке этой футболки после снижения цены?

Координатная плоскость

Задачи

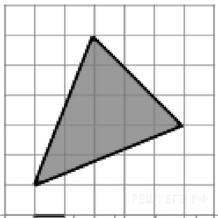
№1

На клетчатой бумаге с размером клетки 1 на 1 изображён угол. Найдите тангенс этого угла.



№2

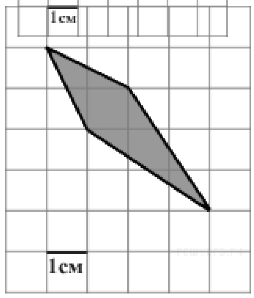
Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см на 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



№3

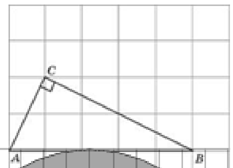
Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см на 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

Поэтому



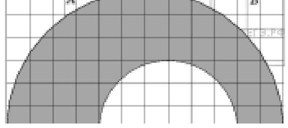
№4

На клетчатой бумаге с размером клетки 1 1 изображён прямоугольный треугольник. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



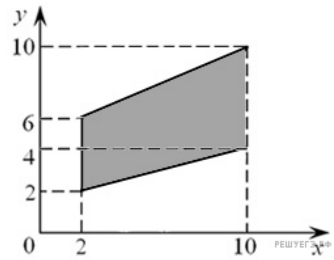
№5

На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 1. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



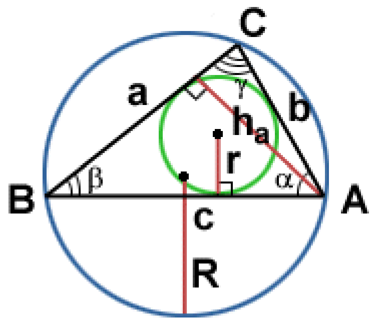
№6

Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (2; 2), (10; 4), (10; 10), (2; 6).



Планиметрия

1. Произвольный треугольник (длины сторон, лежащих против вершин A, B и C, равны a, b, c соответственно; a , b , g - величины углов A, B и C; p - полупериметр; R - радиус описанной окружности; r - радиус вписанной окружности; S - площадь; h_A - высота, проведенная из вершины A):



$$S=\frac{1}{2}h_A a,$$

$$S=\frac{1}{2}b\cdot c\cdot \sin\alpha,$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$r=\frac{S}{p},$$

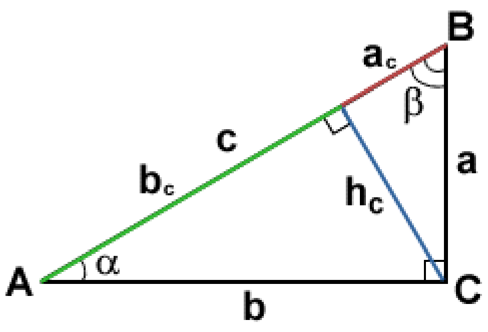
$$R=\frac{a\cdot b\cdot c}{4S};$$

$a^2=b^2+c^2-2\,b\,c\,\cos a$ - теорема косинусов;

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

- **теорема синусов**.

2. Прямоугольный треугольник (a, b - катеты; c - гипотенуза; a_c, b_c - проекции катетов на гипотенузу):



$$S=\frac{1}{2}a\cdot b,$$

$$S=\frac{1}{2}c\cdot h_c,$$

$$r=\frac{a+b-c}{2},$$

$$R=\frac{c}{2},$$

$a^2+b^2=c^2$ - теорема Пифагора.

$$\frac{a_c}{h_c}=\frac{h_c}{b_c};$$

$$\frac{a_c}{a}=\frac{a}{c};$$

$$\frac{b_c}{b}=\frac{b}{c};$$

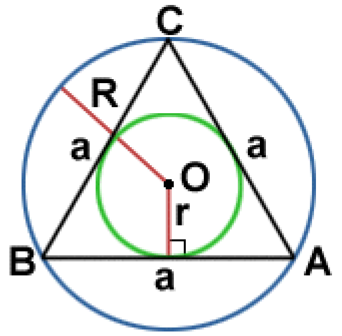
$$a=c\cdot\sin\alpha=c\cdot\cos\beta=b\cdot\mathrm{tg}\alpha=\frac{b}{\mathrm{tg}\beta}.$$

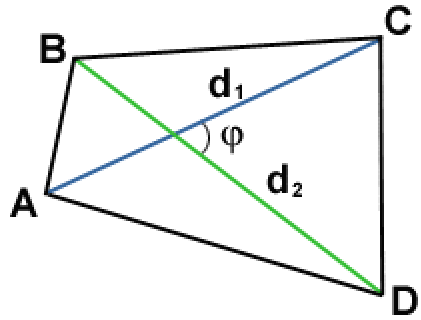
3. Равносторонний треугольник:

$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$,

$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$,

$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.



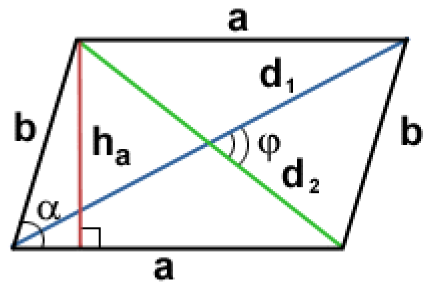


4. Произвольный четырехугольник (d_1 и d_2 - диагонали; j - угол между ними; S - площадь):

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$.

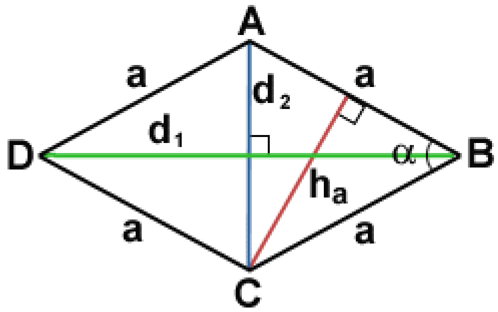
5. Параллелограмм (a и b - смежные стороны; a - угол между ними; h_a - высота, проведенная к стороне a):

$S = ah_a = ab\sin\alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$.



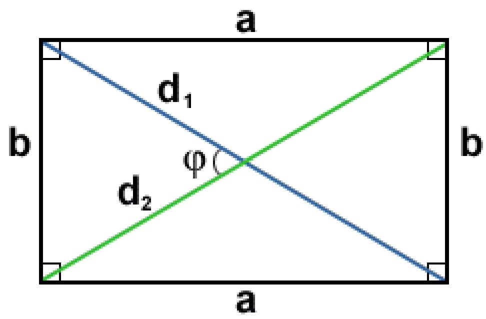
6. Ромб:

$S = ah_a = a^2\sin\alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2$.



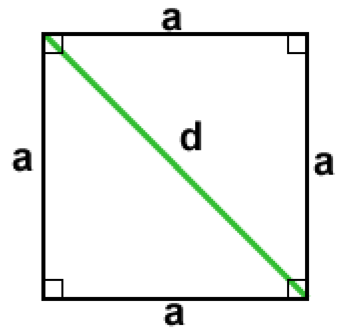
7. Прямоугольник:

$S = ab = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$; $d_1 = d_2$.



8. Квадрат (d - диагональ):

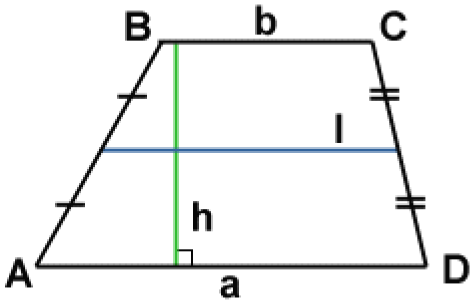
$$S = a^2 = \frac{d^2}{2}.$$



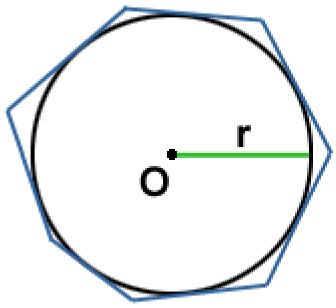
9. Трапеция (a и b - основания; h - расстояние между ними; l - средняя линия):

$$l = \frac{a+b}{2};$$

$$S = \frac{a+b}{2}h = lh.$$



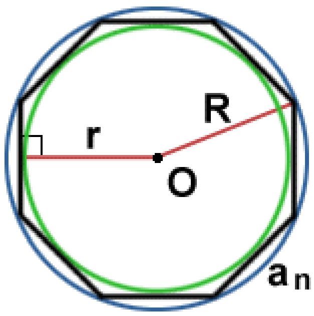
10. Описанный многоугольник (p - периметр; r - радиус вписанной окружности):
S=pr.



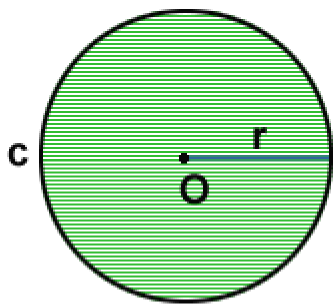
11. Правильный многоугольник (a_n - сторона правильного n-угольника; R - радиус описанной окружности; r - радиус вписанной окружности):

$$a_n = 2R\sin\frac{180^0}{n};$$

$$S = \frac{na_n r}{2}.$$



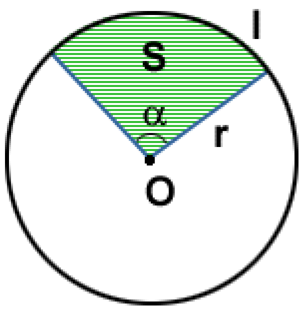
12. Окружность, круг (r - радиус; c - длина окружности; S - площадь круга):
c=2pr;
S= pr^2.



13. Сектор (l - длина дуги, ограничивающей сектор; n^o - градусная мерасоответствующего центрального угла; a - радианная мера центрального угла):

$$l = \frac{\pi r n^0}{180^0} = r\alpha;$$

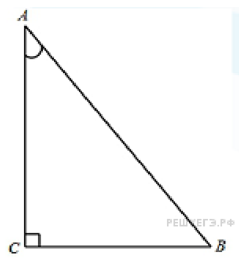
$$S = \frac{\pi r^2 n^0}{360^0} = \frac{1}{2} r^2 \alpha.$$



Задачи

№1

В треугольнике ABC угол C равен 90°, AC=4,8, sinA=7/25. Найдите AB

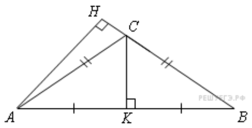


№2

В прямоугольном треугольнике угол между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины прямого угла, равен 21°. Найдите меньший угол данного треугольника. Ответ дайте в градусах.

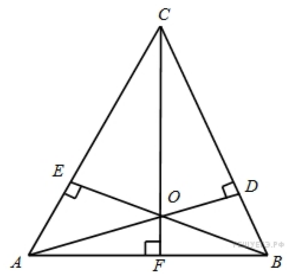
№3

В треугольнике ABC AC=BC, CH — высота, sinBAC=2/3. Найдите BH.



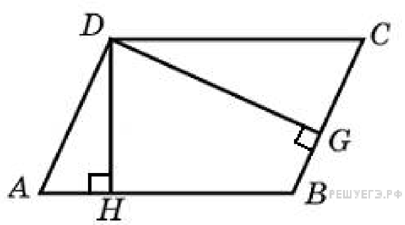
№4

В треугольнике *ABC* угол *A* равен 60°, угол *B* равен 82°. *AD*, *BE* и *CF* — высоты, пересекающиеся в точке *O*. Найдите угол *AOF*. Ответ дайте в градусах.



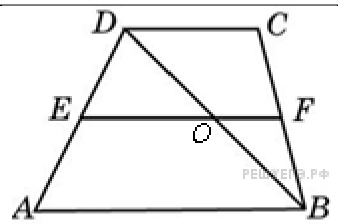
№5

Стороны параллелограмма равны 9 и 15. Высота, опущенная на первую сторону, равна 10. Найдите высоту, опущенную на вторую сторону параллелограмма.



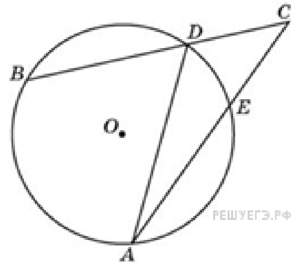
№6

Основания трапеции равны 4 и 10. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из ее диагоналей.



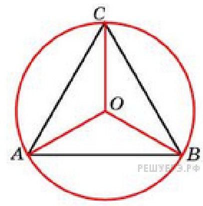
№7

Угол *ACB* равен 42°. Градусная величина дуги *AB* окружности, не содержащей точек *D* и *E*, равна 124°. Найдите угол *DAE*. Ответ дайте в градусах.



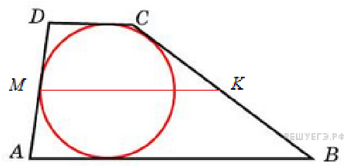
№8

Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен R=√3. Найдите сторону этого треугольника.



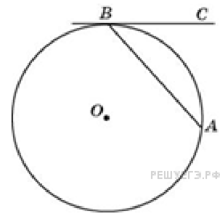
№9

Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 3 и 5. Найдите среднюю линию трапеции.



№10

Хорда *AB* стягивает дугу окружности в 92°. Найдите угол *ABC* между этой хордой и касательной к окружности, проведенной через точку *B*. Ответ дайте в градусах.



№11

1. В треугольнике ABC, $AB = 15$, $BC = 7$, $CA = 9$. Точка D лежит на прямой BC причем $BD : DC = 5 : 7$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

Тригонометрия

Перевод градусной меры угла в радианную и обратно.

Пусть α — градусная мера угла, β — радианная, тогда справедливы формулы:

$\beta = \dfrac{\pi \cdot \alpha^\circ}{180^\circ}$, $\alpha^\circ = \dfrac{180^\circ \cdot \beta}{\pi}$.

Формулы зависимости между функциями одного и того же аргумента:

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.
2. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.
3. $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.
4. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$.
5. $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.
6. $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

Формулы сложения.

1. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$.
2. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$.
3. $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$.

Формулы двойных и половинных углов.

1. $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$.
2. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.
3. $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2 \cdot \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$.
4. $\sin 2\alpha = \dfrac{2 \cdot \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$.
5. $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{2}}$.
6. $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{2}}$.
7. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$.
8. $\cos 2\alpha = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$.

Формулы преобразования суммы в произведение:

$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \cdot \sin\dfrac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$	

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	$1-\cos\alpha = 2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}$
$\cos\alpha - \cos\beta = -2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$	$1+\cos 2\alpha = 2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$

Формулы преобразования произведения в сумму:

- $\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$.
- $\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right]$.
- $\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]$.

Формулы приведения:

φ	α	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
sin φ	- sin α	cos α	cos α	sin α	- sin α	- cos α	- cos α	- sin α	sin α
cos φ	cos α	sin α	- sin α	- cos α	- cos α	- sin α	sin α	cos α	cos α
tg φ	- tg α	ctg α	- ctg α	- tg α	tg α	ctg α	- ctg α	- tg α	tg α
ctg φ	- ctg α	tg α	- tg α	- ctg α	ctg α	tg α	- tg α	- ctg α	ctg α

$$\alpha = \arcsin a \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = a \\ -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\alpha = \arccos a \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = a \\ 0 \le \alpha \le \pi \end{cases}$$

$$\alpha = arctga \Leftrightarrow \begin{cases} tg\alpha = a \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\alpha = arcctga \Leftrightarrow \begin{cases} ctg\alpha = a \\ 0 < \alpha < \pi \end{cases}$$

Для выполнения заданий, связанных с **обратными тригонометрическими функциями**, нужно, во-первых, четко помнить определения этих понятий:.
Удобно при решении таких задач сделать замену (например, *α = arcsin x*) и работать с более привычным объектом — углом *α*, лежащем в первой или четвертой четверти тригонометрического круга, синус которого равен x.

Задачи
№1
Вычислите значение tg α, если ctg α = 0,2.
№2

Вычислите:

- *1)* $\sin 10\pi$;
- *2)* $tg\dfrac{41\pi}{4}$;
- *3)* $\sin 75^0$;
- *4)* $\cos 105^0$;
- *5)* $2\sqrt{2}\cos 15^0$.

№3

Известно, что $\sin\alpha - \cos\alpha = 0{,}3$.

Найти:

1) $\sin^2\alpha$;

2) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$;

3) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$.

№4

Найти tg α, если $\dfrac{3\sin\alpha + 4\cos\alpha}{\sin\alpha - 2\cos\alpha} = 5.$

№5

Вычислить cos α, если cos2α = 3/4 и $\dfrac{3\pi}{2} < 2\alpha < 2\pi.$

№6

Найти значение выражения: $\dfrac{\sin^3 19° - \cos^3 19°}{\sin 19° - \cos 19°} - \dfrac{\sin^2 57° + \sin^2 33°}{tg19° + ctg19°}$.

№7

Вычислить sin10º sin30º sin50º sin70º .

№8

Упростить выражение: $\dfrac{\cos 2\alpha}{ctg^2\alpha - tg^2\alpha}$.

№9

Вычислить cos(4arctg 5)

№10

Выразить через все обратные функции $\arcsin\left(-\dfrac{2}{3}\right)$.

Уравнения

Рациональные уравнения

Часто трудности с решением рациональных уравнений обусловлены для абитуриентов тем, что решение, как говорится «в лоб», по алгоритму метода разложения на множители:

$$A(x) = B(x) \Leftrightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{cases},$$

где A (x), B (x) — произвольные рациональные выражения;P (x), Q (x) — многочлены,приводит к громоздким, «рутинным» преобразованиям или к необходимости находить корни многочленов степени большей, чем второй. При этом даже в самых очевидных случаях, абитуриенты не применяют метод введения новой переменной. А ведь введение новой переменной позволяет быстро упростить решаемое уравнение. Это мощный метод, его следует понимать и применять.

Введение новой переменной осуществляется тогда, когда решаемое уравнение представимо в виде $f(g(x)) = 0$. Полагая $g(x) = t$, мы переходим к решению системы:

$$\begin{cases} f(t) = 0, \\ g(x) = t. \end{cases}$$

Если уравнения $f(t) = 0$, $g(x) = t_1$, $g(x) = t_2$, …, $g(x) = t_n$, где $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — корни уравнения $f(t) = 0$, проще исходного уравнения, то метод, как говорится, сработал.

Рассмотрим различные рациональные уравнения, для решения которых весьма полезен метод введения новой переменной, но не очевидны случаи, когда исходное уравнение непосредственно имеет вид $f(g(x)) = 0$. Поиск удачной подстановки $g(x) = t$ и специальная работа по приведению исходного уравнения к указанному виду, составляет главную сущностную часть решения уравнения. Решение же уравнения $f(t) = 0$ и совокупности уравнений $g(x) = t_i$ — сравнительно несложная, техническая часть процесса решения уравнения.

Решение дробно-рациональных уравнений нередко сводится к решению обычных квадратных уравнений, но с учетом ограничений на допустимые значения неизвестного. В частности, из ОДЗ исключаются те значения x, при которых хотя бы один из знаменателей дробей, входящих в уравнение, обращается в 0.

Этапы решения рационального уравнения.

1. Определить ОДЗ (ни один знаменатель не может равняться нулю).
2. Найти наименьший общий знаменатель всех дробей.
3. Умножить уравнение на этот знаменатель и решить полученное целое уравнение.
4. Включить в ответ только те корни, которые входят в ОДЗ.

Показательные уравнения

Для решения показательного уравнения его нужно свести к простейшему уравнению вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, откуда следует, что $f(x) = g(x)$. Иногда такое преобразование можно провести непосредственно, в других случаях требуется предварительно сделать замену переменной.

Логарифмические уравнения

При решении логарифмических уравнений, так же, как в случае иррациональных уравнений, возможно появление посторонних корней. Причина их появления — расширение области определения исходного уравнения. Поэтому и проверка корней логарифмического уравнения осуществляется либо непосредственно по предварительно найденной области определения, либо по условиям её задающим (подстановкой в соответствующую систему неравенств). Заметим, что иногда удобно осуществить проверку и непосредственной подстановкой найденных корней в исходное логарифмическое уравнение. Это, конечно же, допустимо. Естественно, что при решении логарифмических уравнений возможно и следование стратегии равносильных преобразований. Далее мы рассмотрим примеры решения разного рода. Расширение области определения при решении логарифмических уравнений связано, как правило, с двумя обстоятельствами:

- а) **преобразование потенцирования** («отбрасывания» логарифмов, замена уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ уравнением $f(x) = g(x)$);
- б) **использование «справа — налево» формул**:

1. $\log_a 1 = 0$; $(a > 0,\ a \neq 1, x > 0,\ b > 0,\ c > 0)$.
2. $\log_a a = 1$;
3. $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$;
4. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$;
5. $\log_a b^c = c\log_a |b|$; $(b^c > 0)$.
6. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$;
7. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

Область определения левой части этих формул может быть шире области определения правой их части. Заметим, что применение этих формул «слева — направо» вообще следует избегать, т.к. это может привести к сужению области определения уравнения и потере корней.

Тригонометрические уравнения

Устойчивым является заблуждение абитуриентов о том, что при решении тригонометрических уравнений не нужна проверка. Это — далеко не всегда.
При решении тригонометрических уравнений проверка найденных решений необходима, если:

- в процессе решения применялись алгебраические преобразования, которые могли привести к расширению области определения уравнения (например, сокращение дробей);
- в процессе решения применялись тригонометрические преобразования, которые могли привести к расширению области определения уравнения (речь идет о применении тригонометрических формул, левая и правая части которых имеют различные области определения, например: $\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\sin x,\ \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\cos x,\ \frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}=tgx,\ tgxctgx=1;\ \frac{1-\cos x}{\sin x}=tg\frac{x}{2}$;
- в процессе решения применялось возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень.

Каждая из указанных причин может привести к появлению посторонних корней. Заметим, что применение формул «справа налево», напротив, может привести к потере корней, в силу сужения области определения.

Иррациональные уравнения

Весьма распространенный прием решения иррациональных уравнений и неравенств — возведение в квадрат. Тем не менее, советуем вам пользоваться им как можно реже, ибо он обладает существенными недостатками: во-первых, возводя в квадрат обе части уравнения, вы расширяете область допустимых значений неизвестного, что может привести к появлению посторонних корней; во-вторых, часто в результате этой операции получается уравнение с громоздкими коэффициентами, работать с которыми затруднительно (особенно если на экзамене не разрешается пользоваться калькулятором). Наконец, главный недостаток этого приема — увеличение вдвое степени уравнения. Возведя обе части в квадрат, вы можете избавиться от иррациональностей, но получить рациональное уравнение степени выше второй, способы решения которого в общем виде вам неизвестны или вообще не существуют. Если возводить в квадрат все-таки приходится, нужно внимательно следить за тем, чтобы не включить в ответ посторонние корни. В частности, если уравнение имеет вид $\sqrt{f(x)}=g(x)$, то для корней должно выполняться условие $g(x)\ge 0$ (при этом $f(x)=g^2(x)\ge 0$, и условие $f(x)\ge 0$ отдельно ставить не требуется). Еще один способ обнаружить посторонние корни — проверка всех найденных корней подстановкой их в первоначальное уравнение.

Системы уравнений

Решением системы двух уравнений называется пара чисел (x_0; y_0), которая каждое уравнение системы обращает в тождество. Решить систему – значит найти все ее решения.
Несколько способов решения систем.

1. **Способ подстановки.**

Решим систему уравнений: $\begin{cases}2x+3y=12\\5x-2y=11\end{cases}$

1) выражаем одно неизвестное через другое, воспользовавшись одним из заданных уравнений. Обычно выбирают то уравнение, где это делается проще. В данном случае нам все равно, какое из заданных уравнений использовать для нашей цели. Возьмем, например, первое уравнение системы, и выразим *x* через *y*: $x=\frac{12-3y}{2}$.

2) подставим во второе уравнение системы вместо x полученное равенство: $5\cdot\frac{12-3y}{2}-2y=11$. Получили линейное уравнение относительно переменной *y*. Решим это уравнение, помножим это равенство на 2, чтобы избавиться от дроби в левой части равенства: $5\cdot(12-3y)-4y==22;\quad 60-15y-4y=22;\quad 19y=38;\quad y=2.$ Подставим найденное значение $y=2$ в равенство, выражающее *x*, получим: $x=\frac{12-3\cdot 2}{2}=\frac{6}{2}=3$. Таким образом, нами найдена пара значений $\begin{cases}x=3\\ y=2\end{cases}$, которая является решением заданной системы. Осталось сделать проверку.

Проверка: $\begin{cases}2\cdot 3+3\cdot 2=12,\\ 5\cdot 3-2\cdot 2=11;\end{cases}\quad \begin{cases}12\equiv 12,\\ 11\equiv 11.\end{cases}$

2. Способ уравнивания коэффициентов при неизвестных состоит в том, что исходную систему приводят к такой эквивалентной системе, где коэффициенты при *x* или *y* были одинаковы. Покажем, как это делается, на данном примере.

Решим систему: $\begin{cases}5x-3y=17,\\ 2x+5y=13.\end{cases}$

1) Для приравнивания коэффициентов, например при *y* надо найти НОК(3; 5)=15, где 3 и 5 — коэффициенты при *y* в уравнениях системы. Затем разделить 15 на 3 — коэффициент при *y* в первом уравнении, получим 5. Делим 15 на 5 — коэффициент при — во втором уравнении, получаем 3. Следовательно, первое уравнение системы умножаем на 5. а второе на 3:

$$\begin{cases}5x-3y=17, & |\cdot 5\\ 2x+5y=13; & |\cdot 3\end{cases}\quad \begin{cases}25x-15y=85,\\ 6x+15y=39.\end{cases}$$

2) Так как коэффициенты при *y* имеют противоположные знаки, складываем почленно уравнения системы:

$$\begin{cases}25x-15y=85,\\ +\\ 6x+15y=39\end{cases}$$
$$\overline{\quad 31x=124 \quad}$$
$$x=4$$

3) Для нахождения соответствующего значения *y* подставим значение *x* в любое исходное уравнение системы (обычно подставляют в то уравнение системы, где отыскание значения *y* проще). В исходной системе уравнения одинаковы по сложности, поэтому подставим значение *x* = 4 во второе уравнение, чтобы не делать лишней операции деления на -1: $2\cdot 4+5y=13;\ 5y=13-8;\ 5y=5;\ y=1.$

Таким образом, найдена пара значений $\begin{cases} x = 4; \\ y = 1, \end{cases}$ которая является решением заданной системы.

Иногда задаются системы уравнений, где нет необходимости в уравнивании коэффициентов при неизвестных. Почленное сложение или вычитание уравнений системы приводит к простейшему решению.

Например, решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 13; \\ x + 2y = 7. \end{cases}$$

Складывая почленно уравнения заданной системы, получим:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 3x - 2y = 13, \\ + \\ x + 2y = 7 \end{cases} \\ \hline \quad 4x = 20 \\ \qquad x = 5 \end{array}.$$

Подставив вместо *x* значение 5 во второе уравнение исходной системы, находим соответствующее значение *y*: $5 + 2y = 7; \quad 2y = 2; \quad y = 1.$

Таким образом, решением системы является $\begin{cases} x = 5; \\ y = 1. \end{cases}$

При решении систем тригонометрических уравнений последние сводят либо к одному уравнению с одним неизвестным, либо к системе уравнений относительно аргументов или функций этих аргументов.

Рассмотрим лишь некоторые типы тригонометрических уравнений и наиболее употребительные методы их решения.

Решим систему: $\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = a, \\ \cos x \cdot \cos y = b. \end{cases}$

Складывая и вычитая уравнения системы согласно формулам преобразования произведения в сумму функции *sin x*, получаем равносильную систему:

$$\begin{cases} \cos(x - y) = a + b, \\ \cos(x + y) = b - a. \end{cases}$$

Полученная система имеет решение в том случае, когда выполняются условия $-1 \le a + b \le 1$ и $-1 \le b - a \le 1$.

А поскольку обе системы равносильны, то и исходная система имеет решения только при указанных условиях. Если эти условия выполнены, то $\begin{matrix} x - y = \pm\arccos(a + b) + 2\pi k, \\ x + y = \pm\arccos(b - a) + 2\pi n, \end{matrix}$ (*), где *k* и *n* – любые целые числа, а знаки выбираются произвольно.

Пусть $\arccos(a + b) = \alpha, \quad \arccos(b - a) = \beta$.

Четыре серии решений:

$$1) \begin{cases} x - y = \alpha + 2\pi k, \\ x + y = \beta + 2\pi n; \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} x - y = -\alpha + 2\pi k, \\ x + y = \beta + 2\pi n; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x - y = \alpha + 2\pi k, \\ x + y = -\beta + 2\pi n; \end{cases} \qquad 4) \begin{cases} x - y = -\alpha + 2\pi k, \\ x + y = -\beta + 2\pi n. \end{cases}$$

Решая эти системы, находим:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\pi(k+n), \\ y = \frac{1}{2}(\beta-\alpha)+\pi(n-k); \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}(\beta-\alpha)+\pi(k+n), \\ y = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\pi(n-k); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\alpha-\beta)+\pi(k+n), \\ y = -\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\pi(n-k); \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\pi(k+n), \\ y = \frac{1}{2}(\alpha-\beta)+\pi(n-k); \end{cases}$$

Аналогично решается система:

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = a, \\ \cos x \cdot \sin y = b. \end{cases}$$

Задачи

№1

Решим уравнение: $\frac{6}{(x+1)(x+2)} + \frac{8}{(x-1)(x+4)} = 1$

№ 2

Решим уравнение: $\frac{x^2-6x-9}{x} = \frac{x^2-4x-9}{x^2-6x-9}$.

№3

Решить уравнение: $\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} + 4\sqrt{\frac{1-x}{x+1}} = 5$.

№4

Решить уравнение: $\sqrt{x} + \sqrt{x-16} = \sqrt{32-x}$.

№5

Решить уравнение: $\sin\left(3^{x-1}+3^{x-2}\right)\cos\left(3^{x-1}+3^{x-2}\right) = \frac{1}{4}$.

№6

Решить уравнение: $\log_{\sin x}\cos x + \log_{\cos x}\sin x = 2$.

№7

Решим уравнение $\log_4 \log_2 \log_3 (2x-1) = \frac{1}{2}$.

№8

Решим уравнение: $\frac{1}{5-4\lg(x+1)} + \frac{5}{1+4\lg(x+1)} = 2$.

№9

Решить уравнение: $2^{2x} - 8 \cdot 5^{2x} + 2 \cdot 10^x = 0.$

№10

Решить уравнение: $12x * 4^x – 5x * 2^{x+1} – 9 * 4^{x+1} + 30 * 2^x = 0.$

№11

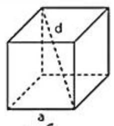
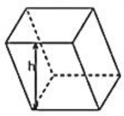
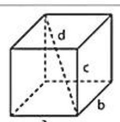
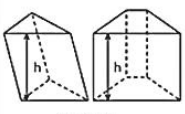
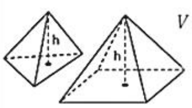
Решить уравнение: $\left|3^x + \frac{17}{9}\right| + \left|3^x - \frac{1}{9}\right| = 2.$

№12

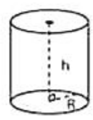
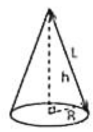
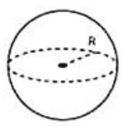
Решим систему уравнений: $\begin{cases} \frac{10}{2x+3y} + \frac{15}{4x-y} = 8, \\ \frac{15}{2x+3y} - \frac{9}{4x-y} = 0. \end{cases}$

Стереометрия

МНОГОГРАННИКИ

ОБЪЁМЫ	ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ
 куб $V = a^3$ a – ребро куба	$S = 6a^2$ $d = a\sqrt{3}$ длина диагонали
 параллелепипед $V = S_{осн} \cdot h$	$S = 2S_{осн} + S_{бок}$ $S_{осн}$ – площадь основания h – высота
 прямоугольный параллелепипед $V = a \cdot b \cdot c$	$S = 2ab + 2ac + 2bc$ $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
 призма $V = S_{осн} \cdot h$	$S = 2S_{осн} + S_{бок}$ $S_{осн}$ – площадь основания h – высота
 пирамида $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$	$S = S_{осн} + S_{бок}$

ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

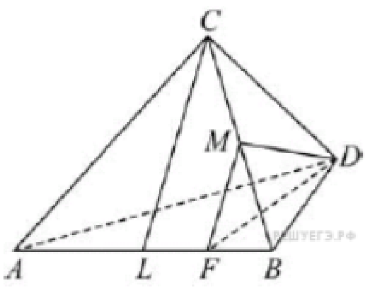
ОБЪЁМ	ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ
 цилиндр $V = \pi R^2 h$ R – радиус основания h – высота	$S = 2S_{осн} + S_{бок} =$ $= 2\pi R^2 + 2\pi Rh$
 конус $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$	$S = S_{осн} + S_{бок} = \pi R^2 + \pi RL$ L – образующая $L = \sqrt{R^2 + h^2}$
 шар $V = \frac{4}{3}\pi R^3$	$S = 4\pi R^2$

Задачи

1. Длина ребра правильного тетраэдра $ABCD$ равна 1. Найдите угол между прямыми DM и CL, где M — середина ребра BC, L — середина ребра AB.

Решение.

Пусть MF прямая параллельная прямой CL и F точка ее пересечения с AB. Тогда искомый угол между прямыми DM и CL равен углу DMF. Обозначим угол DMF буквой α. MF — средняя линия треугольника BCL, поэтому:



$$MF = \frac{1}{2}CL = \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad BF = \frac{1}{2}BL = \frac{1}{4}.$$

Выразим квадрат отрезка DF по теореме косинусов в двух треугольниках: DMF и BDF:

$$DF^2 = DM^2 + MF^2 - 2DM \cdot MF \cos\alpha = BD^2 + BF^2 - 2BD \cdot BF \cos 60^\circ.$$

Поскольку $DM = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $BD = 1$, подставляя числовые данные, получим:

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{16} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cos\alpha = 1 + \frac{1}{16} - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}.$$

Откуда $\cos\alpha = \frac{1}{6}$.

Ответ: $\arccos\frac{1}{6}$.

11. В правильном тетраэдре $ABCD$ найдите угол между высотой тетраэдра DH и медианой BM боковой грани BCD.

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите косинус угла между плоскостями BA_1C_1 и BA_1D_1.

5. Дан правильный тетраэдр $MABC$ с ребром 1. Найдите расстояние между прямыми AL и MO, где L — середина ребра MC, O — центр грани ABC.

9. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, равной $2\sqrt{10}$, высота призмы равна $2\sqrt{5}$. Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости BCM, где M — середина ребра A_1C_1.

9. Точка E — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите площадь сечения куба плоскостью A_1BE, если ребра куба равны 2.

4. Правильные треугольники ABC и MBC лежат в перпендикулярных плоскостях, $BC = 8$. Точка P — середина CM, а точка T делит отрезок BM так, что $BT : TM = 1 : 3$. Вычислите объём пирамиды $MPTA$.

4. Радиус основания конуса равен 5, а его высота равна 12. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 6. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.

Неравенства

Рациональные неравенства

Для решения рациональных неравенств применяют так называемый метод интервалов.
Метод интервалов, как метод, применяемых для решения рациональных неравенств строго определенного вида: $(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}(x-x_3)^{\alpha_3}\ldots(x-x_n)^{\alpha_n}$ =0,где $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in R$; $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in N$ и V — любой из знаков неравенства > , < , ≥ , ≤ .
Если данное неравенство не соответствует указанному виду, то его необходимо привести к этому виду теми или иными равносильными преобразованиями, и лишь затем применять метод интервалов. Назовем указанный вид неравенства стандартным для решения методом интервалов.

Введем еще два термина. Пусть $(x-x_i)^{\alpha_i}$ — множитель, входящий в неравенство, стандартное для решения методом интервалов. Если показатель степени x_i — нечетное число, то точку $x = x_i$ будем называть **простой**. Если показатель степени x_i — четное число, то точку $x = x_i$ будем называть **двойной**.
Теперь сформулируем **алгоритм метода интервалов**.
Пусть дано неравенство вида, стандартного для решения методом интервалов. Для его решения:

- 1) отметим на числовой прямой точки, соответствующие числам $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, разбив тем самым всю числовую прямую на промежутки (интервалы); причем, если знак неравенства строгий, то точки отмечаются выколотыми, если знак неравенства нестрогий, то точки отмечаются сплошными;2) на каждом из полученных промежутков выражение $(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}(x-x_3)^{\alpha_3}\ldots(x-x_n)^{\alpha_n}$ будет сохранять свой знак постоянным; расставим эти знаки пользуясь правилом чередования знаков:
    - а) в крайнем правом интервале всегда знак «плюс»;
    - б) при переходе через простую точку знак меняется, на противоположный;
    - в) при переходе через двойную точку знак сохраняется;
- 2) после того как знаки всех промежутков определены с полученного рисунка, считывается решение неравенства; ответ записывается в виде объединения промежутков.

Метод интервалов можно применять и для решения дробных рациональных неравенств,

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x)g(x) > 0,$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow f(x)g(x) < 0,$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x) \ge 0, \\ g(x) \ne 0 \end{cases}$$

если воспользоваться равносильностью:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x) \le 0. \\ g(x) \ne 0 \end{cases}$$

Для применения метода нужно преобразовать неравенство так, чтобы в правой его части стоял 0, а левая была произведением нескольких множителей или дробью, числитель и знаменатель которой разложены на множители. Затем находятся корни каждого множителя (то есть от решения неравенства вы переходите к решению уравнений), и среди них выделяются такие, в которых ни один из имеющихся множителей не меняет знак, или меняет знак четное количество множителей.

Логарифмические неравенства

Простейшее логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ сводится к одной из двух систем неравенств:

- *1 случай*. Если $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$, *a > 1*.
- *2 случай*. Если $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$, *0 < a < 1*.

Схемы равносильных преобразований для решения неравенств:

1. $\log_a f(x) > \log_a g(x), a > 0, a \neq$

$$a > 0, a \neq 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_a f(x) > \log_a g(x), \\ a > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} \log_a f(x) < \log_a g(x), \\ 0 < a < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) > 0, \\ a > 1, \\ f(x) > g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 0, \\ 0 < a < 1, \\ f(x) < g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

   Решение: $\log_a f(x) > \log_a g(x),$ где

$$\log_{f(x)} g(x) > 0, \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ 0 < g(x) < 1, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 1, \\ g(x) > 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

2. $\log_{f(x)} g(x) > 0;$ *Решение*:
3. $\log_{f(x)} g(x) \geq 0;$ *Решение*: $\log_{x-2}\left(x^2 - 8x + 14\right) \geq 0$

Показательные неравенства

Решение показательных неравенств сводится к решению простейших неравенств: $a^{f(x)} > a^{g(x)},\ a^{f(x)} \geq a^{g(x)},\ a^{f(x)} < a^{g(x)},\ a^{f(x)} \leq a^{g(x)}\ (a > 0).$

Важно помнить при этом, что при *a > 1* можно перейти к неравенству, связывающему показатели степеней, знак которого совпадает со знаком исходного неравенства; при *0 < a < 1* показатели будут связаны неравенством противоположного знака.

Т.е. если $a > 1$ **, то неравенства** $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ **и** $f(x) < g(x)$ **равносильны;**

если $0 < a < 1$**, то неравенства** $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ **и** $f(x) > g(x)$ **равносильны (это следует из того, что при** $a > 1$ **показательная функция возрастает, а при** $0 < a < 1$ **убывает).**

Схемы равносильных преобразований для решения неравенств:

1. $\log_a f(x) > \log_a g(x), a > 0, a \neq 1;$

Решение: $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, где

$$a>0, a\neq 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_a f(x) > \log_a g(x),\\ a>1,\end{cases}\\ \begin{cases}\log_a f(x) > \log_a g(x),\\ 0<a<1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)>0,\\ a>1,\\ f(x)>g(x),\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)>0,\\ 0<a<1,\\ f(x)<g(x);\end{cases}\end{array}\right.$$

2. $\log_{f(x)} g(x) > 0$; *Решение*:

$$\log_{f(x)} g(x) > 0, \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<f(x)<1,\\ 0<g(x)<1,\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)>1,\\ g(x)>1;\end{cases}\end{array}\right.$$

3. $\log_{f(x)} g(x) \geq 0$; *Решение*:

$$\log_{f(x)} g(x) \geq 0, \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<f(x)<1,\\ 0<g(x)\leq 1,\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)>1,\\ g(x)\geq 1;\end{cases}\end{array}\right.$$

Иррациональные неравенства

Основным методом решения иррациональных неравенств **является** метод возведения в степень**. При этом решение таких неравенств сводится к решению** рациональных неравенств **или систем рациональных неравенств.**

Задачи

№1

Решим неравенство: $x(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)\leq 0$.

№2

Решить неравенство: $\log_3 \log_5 \dfrac{3x+5}{x+6} < 0$.

№3

Решить неравенство: $\sqrt{x^2+6x-7} > 2x-1$

№4

Решить неравенство: $3\sqrt{x^2-17x+16} > x^2-17x+12$.

Прогрессии

Арифметическая прогрессия

Формулы *n*-го члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d(n-1)$

$a_n = a_{n-1} + d$

Соотношение между тремя соседними членами арифметической прогрессии:

$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$

Формула суммы арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

Свойство арифметической прогрессии:

$a_m + a_n = a_k + a_p$; при: $m + n = k + p$.

Если сказано, что числа x, y, z в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию, то это значит, что:

2y = x + z

Геометрическая прогрессия

Формулы *n*-го члена геометрической прогрессии:

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$b_n = b_{n-1} \cdot q$

Соотношение между тремя соседними членами геометрической прогрессии:

$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$

Формула суммы геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$$

Формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$S_{\text{беск.убыв.}} = \frac{b_1}{1-q}$; при: $|q| < 1$.

Свойство геометрической прогрессии:

$b_m \cdot b_n = b_k \cdot b_p$; при: $m + n = k + p$.

ПРИМЕР. Сумма четвертого и шестого членов арифметической прогрессии равна 14. Найти сумму первых девяти членов прогрессии.

РЕШЕНИЕ. Используем свойство арифметической прогрессии:

$$a_4 + a_6 = a_1 + a_9, \text{ т.к. } 4 + 6 = 1 + 9.$$

Тогда $a_4 + a_6 = a_1 + a_9 = 14$. Тогда сумма девяти членов:

$$S_9 = \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 9 = \frac{14}{2} \cdot 9 = 63.$$

ОТВЕТ: 63.

ПРИМЕР. Произведение первого и пятого членов геометрической прогрессии равно 12. Частное от деления второго члена на четвертый равно 3. Найти второй член прогрессии.

РЕШЕНИЕ. $\frac{b_2}{b_4}=3 \Rightarrow \frac{b_1 \cdot q}{b_1 \cdot q^3}=3 \Rightarrow q^2=\frac{1}{3} \Rightarrow q=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$b_1 \cdot b_5 = 12$$
$$b_1 \cdot b_1 \cdot q^4 = 12$$
$$b_1^2 \cdot q^4 = 12$$
$$\frac{b_1^2}{9} = 12$$
$$b_1^2 = 108$$
$$b_1 = \pm 6 \cdot \sqrt{3}$$
$$b_2 = b_1 \cdot q = \pm 6.$$

ПРИМЕР. Три числа, сумма которых равна 78, образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Их можно рассматривать как первый, третий и девятый члены арифметической прогрессии. Найти второе число.

РЕШЕНИЕ. Первый член геометрической прогрессии x. Второй член геометрической прогрессии $x+2d$. Третий член геометрической прогрессии $x+8d$. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x+x+2d+x+8d=78 \\ (x+2d)^2=x(x+8d) \end{cases}$$

Решим систему и найдем $x+2d$.

Функции

Координаты и базовые понятия о функциях

Длина отрезка на координатной оси находится по формуле:

$$|AB|=|x_2-x_1|$$

Длина отрезка на координатной плоскости ищется по формуле:

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Для нахождения длины отрезка в трёхмерной системе координат используется следующая формула:

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Область определения функции – это все значения независимой переменной (аргумента функции, обычно это *x*), при которых функция определена, т.е. ее значение существует. Обозначается область определения *D*(*y*).

Область значений функции – это все возможные значения зависимой переменной данной функции. Обозначается $E(y)$.

Функция возрастает на промежутке, на котором большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Функция убывает на промежутке, на котором большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Промежутки знакопостоянства функции – это промежутки независимой переменной, на которых зависимая переменная сохраняет свой положительный или отрицательный знак.

Нули функции – это такие значения аргумента, при которых величина функции равна нулю. В этих точках график функции пересекает ось абсцисс (ось ОХ).

Функцию $y = f(x)$ называют **четной**, если она определена на симметричном множестве и для любого x из области определения выполняется равенство:

$$f(-x) = f(x)$$

Функцию $y = f(x)$ называют **нечетной**, если она определена на симметричном множестве и для любого x из области определения выполняется равенство:

$$f(-x) = -f(x)$$

Это означает, что для любых противоположных значений аргумента, значения нечетной функции также противоположны. График нечётной функции всегда симметричен относительно начала координат.

Линейной функцией называют функцию, которую можно задать формулой:

$$y = k \cdot x + b$$

График линейной функции представляет из себя прямую и в общем случае выглядит следующим образом (приведен пример для случая когда $k > 0$, в этом случае функция возрастающая; для случая $k < 0$ функция будет убывающей, т.е. прямая будет наклонена в другую сторону - слева направо):

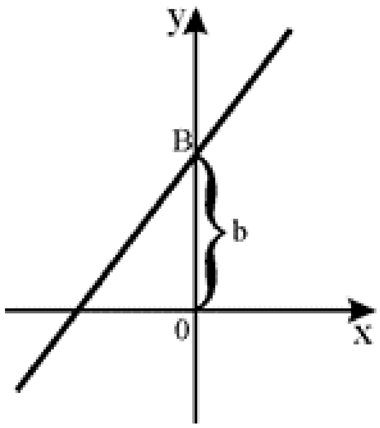
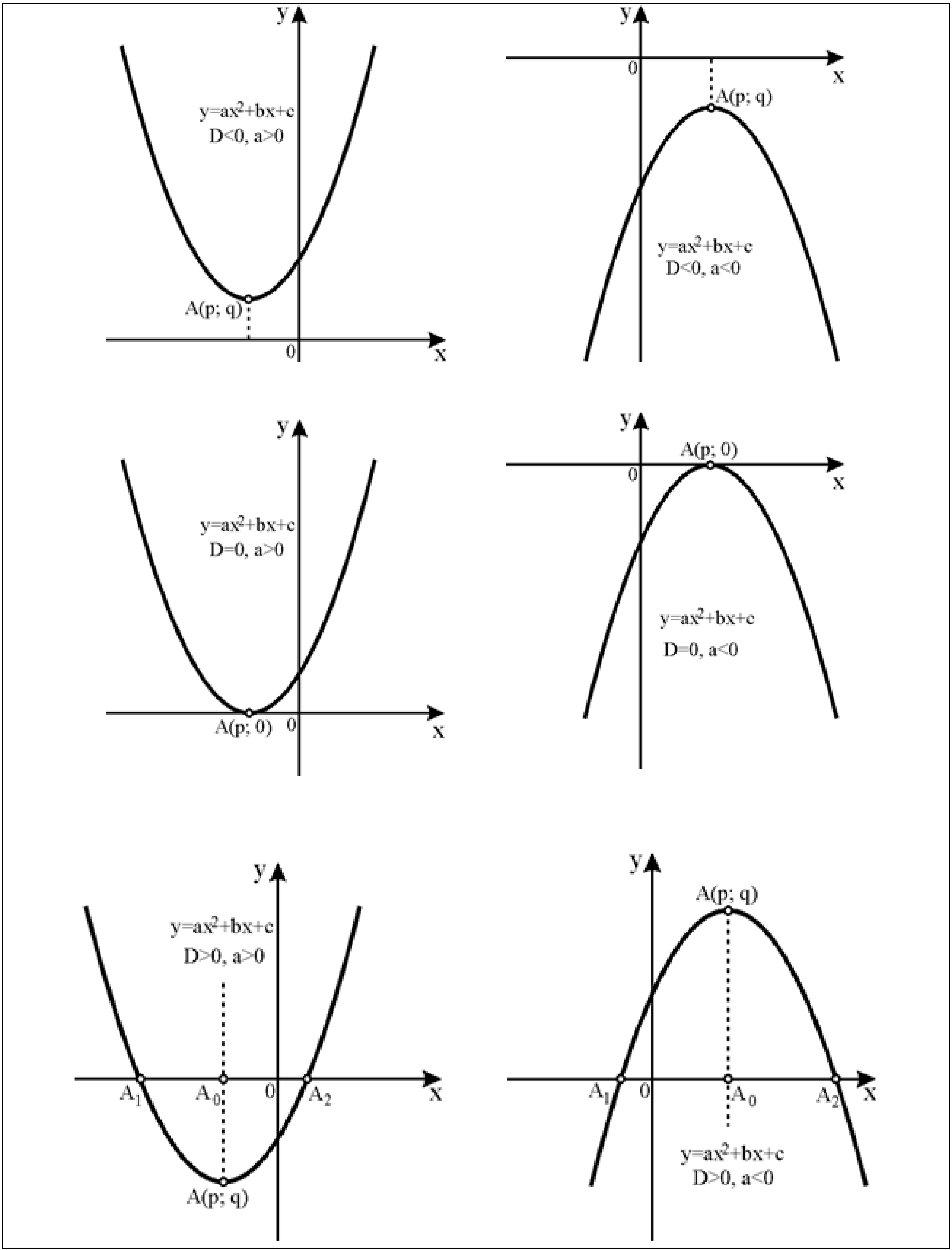


График квадратичной функции (Парабола)

График параболы задается квадратичной функцией:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$


y=ax2+bx+c
D<0, a>0
A(p; q)
y=ax2+bx+c
D<0, a<0
A(p; q)
y=ax2+bx+c
D=0, a>0
A(p; 0)
y=ax2+bx+c
D=0, a<0
A(p; 0)
y=ax2+bx+c
D>0, a>0
A1
A0
A2
A(p; q)
y=ax2+bx+c
D>0, a<0
A(p; q)
A1
A0
A2

При этом:

- если коэффициент $a > 0$, в функции $y = ax^2 + bx + c$, то ветви параболы направлены вверх;
- если же $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

Икс вершины:

$$x_в = -\frac{b}{2a}$$

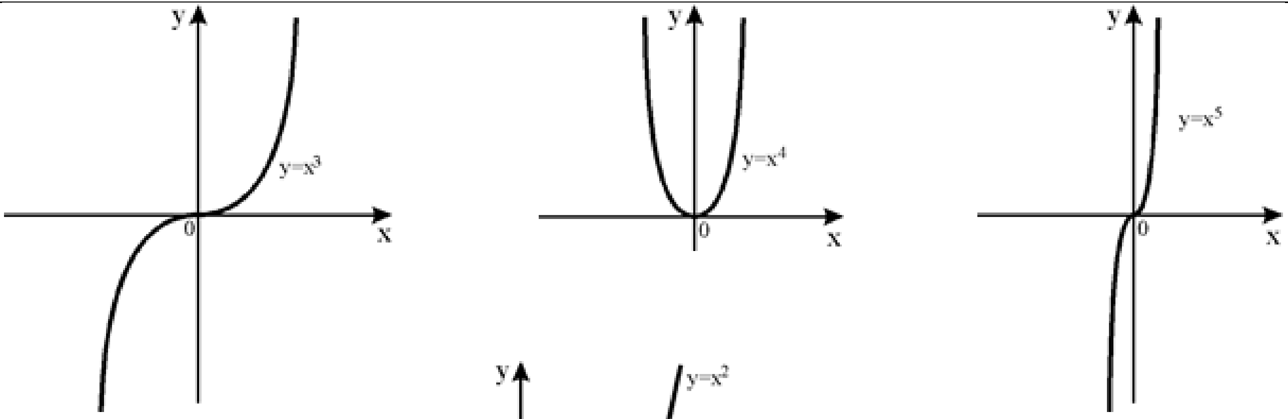
Игрек вершины

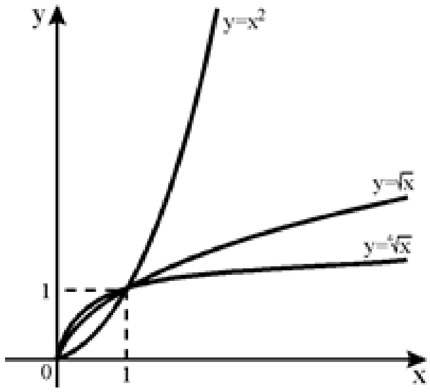
$$y_в = y_{\max[a<0]} = y_{\min[a>0]} = ax_в^2 + bx_в + c = c - \frac{b^2}{4a}$$

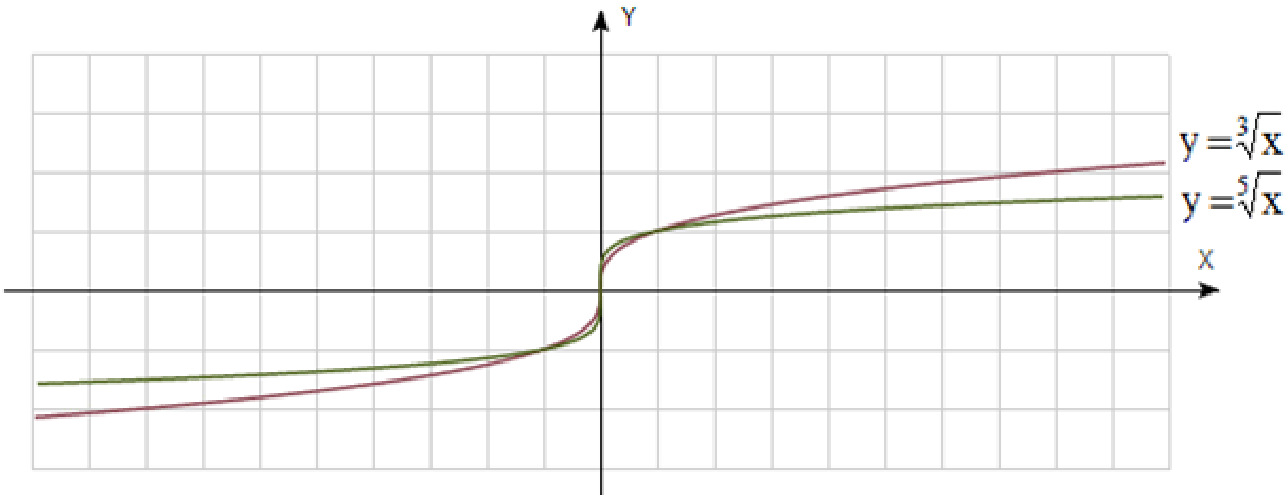
Степенной функцией называют функцию, заданную формулой:

$$y = ax^n$$

Приведем несколько примеров графиков степенных функций:



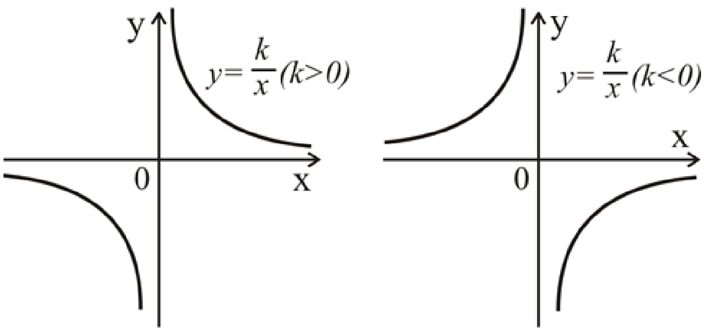




Обратно пропорциональной зависимостью называют функцию, заданную формулой:

$$y = \frac{k}{x}$$

В зависимости от знака числа *k* график обратно пропорциональной зависимости может иметь два принципиальных варианта:

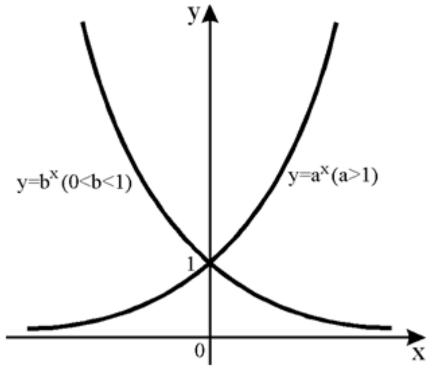


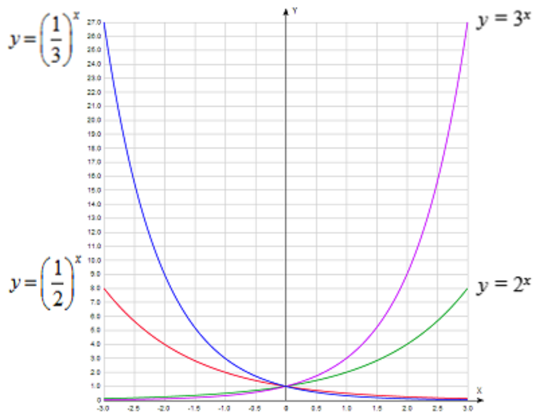
Асимптота - это линия, к которой линия графика функции бесконечно близко приближается, но не пересекает. Асимптотами для графиков обратной пропорциональности приведенных на рисунке выше являются оси координат, к которым график функции бесконечно близко приближается, но не пересекает их.

Показательной функцией с основанием *a* называют функцию, заданную формулой:

$$y = a^x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$$

В зависимости от того больше или меньше единицы число *a* график показательной функции может иметь два принципиальных варианта (приведем также примеры, см. ниже):





Логарифмической функцией называют функцию, заданную формулой:

$$y = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$$

В зависимости от того больше или меньше единицы число *a* график логарифмической функции может иметь два принципиальных варианта:

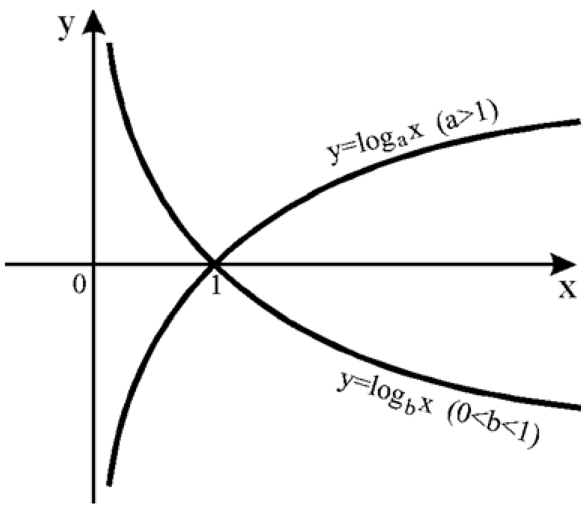
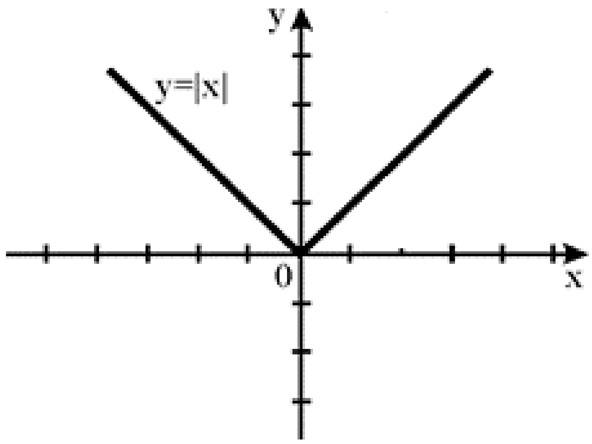


График функции $y = |x|$ выглядит следующим образом:

$y = |x|$



Графики периодических (тригонометрических) функций

На следующем рисунке изображена часть графика функции $y = \sin x$ (весь график неограниченно продолжается влево и вправо), график функции $y = \sin x$ называют **синусоидой**:

$y = \sin x$

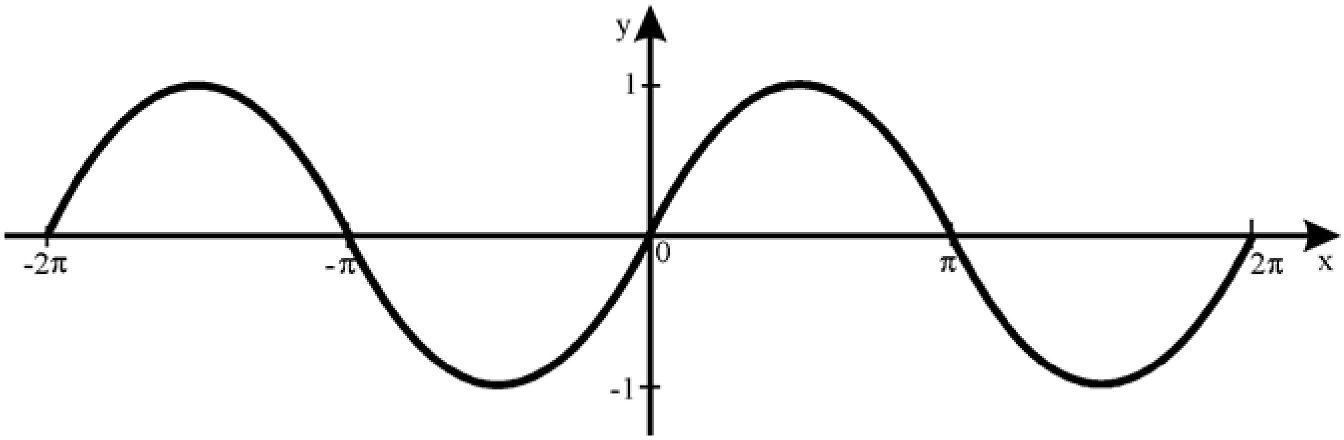
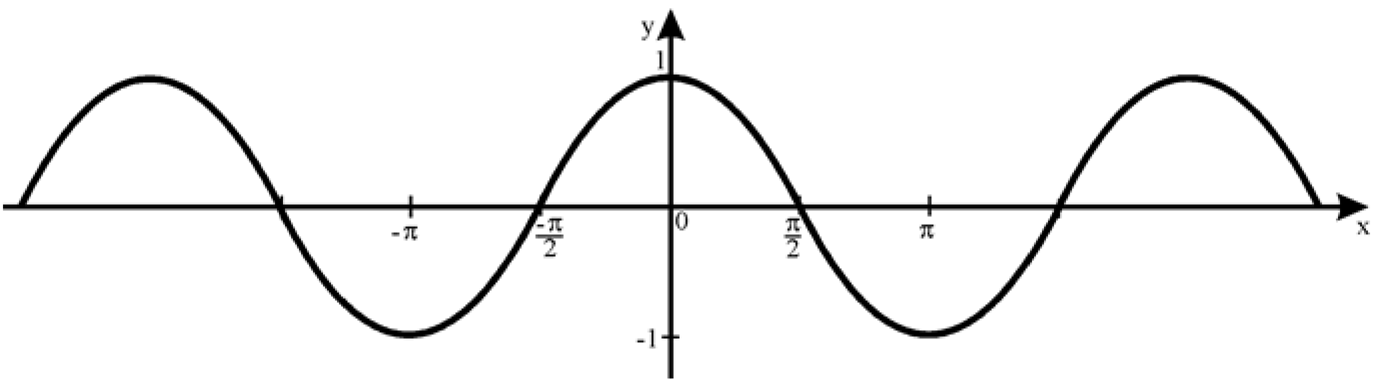
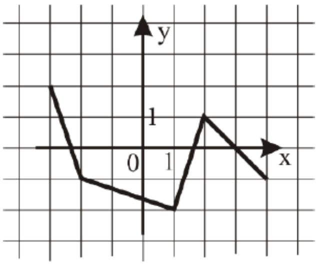


График функции $y = \cos x$ называется **косинусоидой**. Этот график изображен на следующем рисунке. Так как и график синуса он бесконечно продолжается вдоль оси OX влево и вправо:

$y = \cos x$



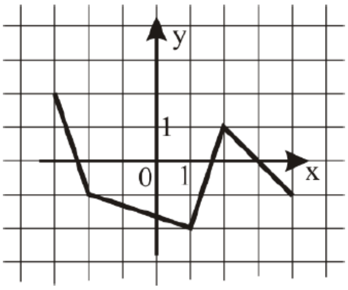
ПРИМЕРЫ: Найти область значений функций изображенных на графиках.



РЕШЕНИЕ: 1. На этом графике наименьшее значение функции равно: -2, а наибольшее значение функции равно: 2. Таким образом:

$$E(y)=[-2;2].$$

ПРИМЕРЫ. Найти промежутки знакопостоянства функций изображенных на графиках.



РЕШЕНИЕ: 1. Значение функции отрицательно, т.е. $y<0$ на промежутках изменения аргумента: $x\in\left(-2\frac{1}{3};1\frac{2}{3}\right)\cup(3;4]$.

Значение функции положительно ($y>0$) при: $x\in\left[-3;-2\frac{1}{3}\right)\cup\left(1\frac{2}{3};3\right)$.

ПРИМЕР. Найти область значений функции $f(x)=\dfrac{12}{-2x^2+6x-5}$.

РЕШЕНИЕ: Сначала найдём область значений функции $y=-2x^2+6x-5$. Вы уже умеете это делать, поэтому сразу её укажем: $(-\infty;-0{,}5]$. При делении 12 на -0,5 получается -24. При делении на ещё меньшие отрицательные числа мы получаем тоже отрицательные числа, располагающиеся на числовой оси всё ближе к нулю. Например, при делении 12 на -1 получается -12, при делении 12 на -2 получается -6, при делении 12 на -6 получается -2, при делении 12 на -24 получается -0,5, при делении 12 на -120 получается -0,1.

Очевидно, что значение функции приближается к нулю, но всегда остаётся отрицательным, так как значение выражения в знаменателе отрицательно при любых значениях величины x.

Делаем вывод, что область значений исходной функции $[-24;0)$. Ответ: $[-24;0)$.